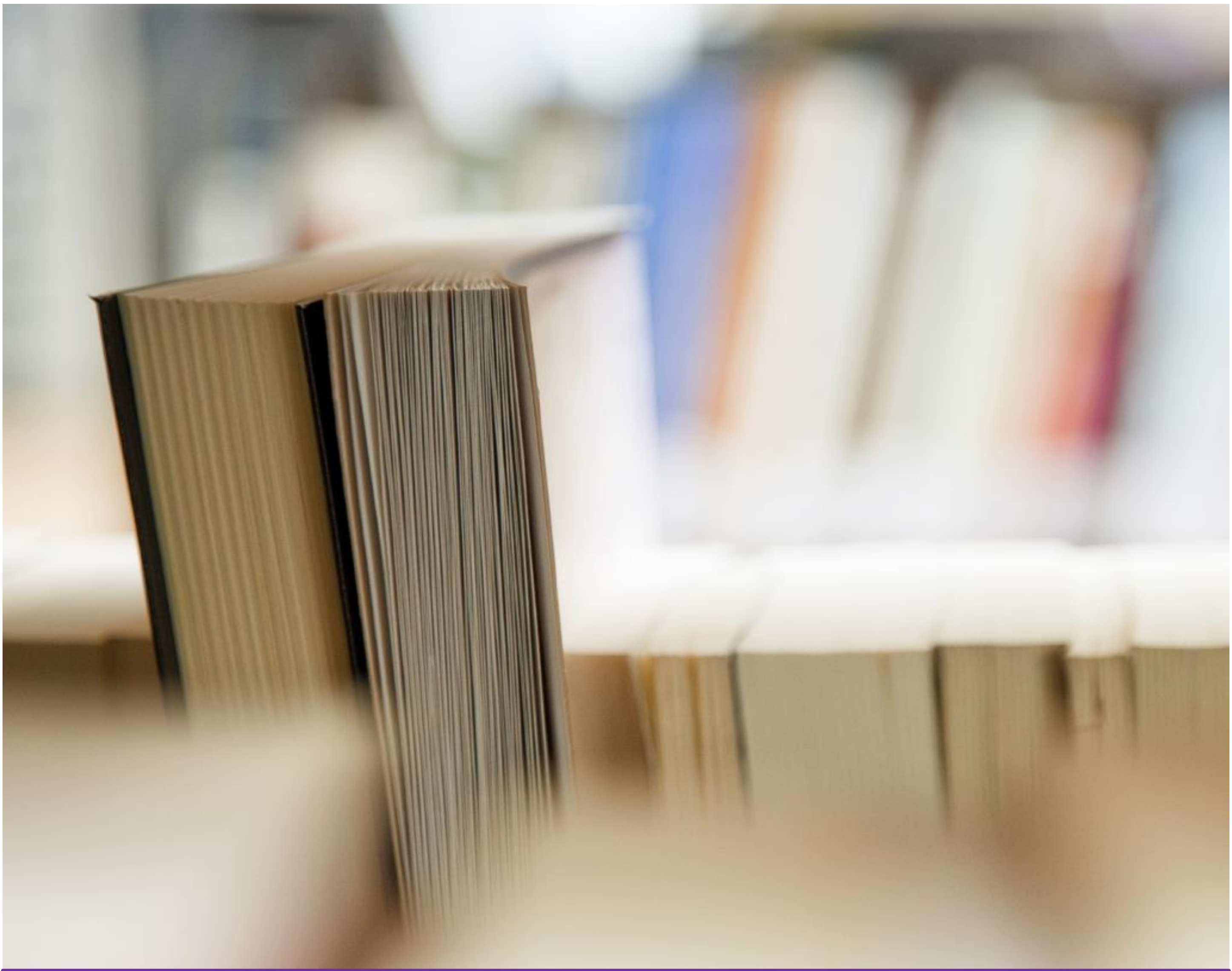

ریاضیات گسسته

فصل سوم:

ترکیبیات (شمارش)

درس اول: مباحثی در ترکیبیات

📖 **یادآوری:** در سال‌های گذشته با دو اصل در ترکیبیات آشنا شدیم:

۱- اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش (یا بیشتر) انجام داد، به‌طوری‌که برای روش اول m انتخاب و برای روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام این کار m+n روش وجود دارد. (وجود عبارت «یا» در مسئله بیانگر اصل جمع است)

۲- اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله (یا بیشتر) باشد به‌طوری‌که برای انجام مرحله اول m انتخاب و برای مرحله دوم n انتخاب وجود داشته باشد، این کار به $m\times n$ حالت قابل انجام است. (وجود عبارت «و» در مسئله بیانگر اصل ضرب است)

همچنین با جایگشت، تبدیل و ترکیب آشنا شدیم:

۳- جایگشت n شیء: اگر n شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آنها کنار هم یک جایگشت از آن‌ها می‌گوییم: $n!$

۴- تبدیل r شیء از n شیء: انتخاب r شیء از n شیء که ترتیب انتخاب آن‌ها مهم باشد: $P(n,r)=(n)_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

۵- ترکیب r شیء از n شیء: انتخاب r شیء از n شیء که ترتیب انتخاب آن‌ها مهم نباشد: $C(n,r)=\dbinom{n}{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$

☑ **مثال: با ارقام ۰ تا ۹:**

الف) چند عدد دو رقمی می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد دو رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

پ) چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

ت) چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

ث) چند عدد سه رقمی فرد می‌توان نوشت؟

ج) چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

چ) چند عدد سه رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

ح) چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت که رقم ۲ در آن وجود داشته باشد؟

خ) چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۴۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

تذکر: گاهی اوقات برای شمارش در حالت‌های خاص باید از روش‌هایی همچون دسته‌بندی اشیا یا تقسیم کل جایگشت‌های ممکن بر تعداد حالت‌هایی که تکراری یا بی‌اثر محسوب می‌شوند، استفاده کنیم.

☑ **مثال: فرض کنید می‌خواهیم با سه حرف «چ»، «پ» و «ژ» و ارقام ۲، ۳، ۴ و ۵ یک رمز شامل ۷ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است:**

الف) تعداد کل رمزهایی که می‌توان تشکیل داد.

ب) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره حروف کنار یکدیگرند.

پ) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار یکدیگرند.

ت) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند.

☑ **مثال: ۵ دانش آموز پایه دوازدهم و ۴ دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم (در یک ردیف) قرار بگیرند اگر بخواهیم:**

الف) همواره دانش‌آموزان هر پایه کنار هم باشند.

ب) به صورت یک درمیان قرار بگیرند (هیچ دو دانش آموز هم پایه کنار هم نباشند).

پ) اگر دانش آموزان پایه یازدهم نیز ۵ نفر باشند، به چند طریق می‌توان آنها را به صورت یک‌درمیان قرار داد؟

☑ **مثال: یک مجموعه ۷ عضوی:**

الف) چند زیرمجموعه ۲ عضوی دارد؟

ب) چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟

☑ **مثال:** از بین ۵ مرد، ۳ زن و ۴ کودک چگونه می‌توان ۳ نفر را انتخاب کرد به‌طوری‌که:

الف) هیچ محدودیتی وجود نداشته باشد؟

ب) یک نفر مرد، یک نفر زن و یک نفر کودک باشد؟

پ) هر سه مرد باشند؟

ت) هر سه نفر از یک جنس باشند؟

ث) دو نفر مرد و یک نفر زن باشد؟

ج) دو نفر مرد باشند؟

چ) حداقل دو نفر مرد باشند؟

ح) حداکثر دو نفر مرد باشند؟

☑ **مثال:** مجموعه $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ مفروض است. تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی A را بیابید به‌طوری‌که:

الف) هیچ محدودیتی وجود نداشته باشد.

ب) حتماً شامل ۱ باشد.

پ) شامل ۱ نباشد.

جایگشت های با تکرار

گاهی اوقات چند شیء تکراری یا یکسان در بین اشیا یافت می‌شود. در این حالت تعداد جایگشت‌های این اشیا با تعداد جایگشت‌ها در حالتی که هیچ دو شیء یکسانی در بین اشیا نباشد، متفاوت بوده و به نظر می‌رسد کمتر باشد. به عنوان مثال تعداد جایگشت‌های سه حرف a، b و c برابر $3!=6$ است ولی تعداد جایگشت‌های سه حرف a و a و b برابر با ۳ است (aab , aba , baa) در واقع چون جابه‌جایی دو حرف a حالت جدیدی تولید نمی‌کند و حالت تکراری به حساب می‌آید پس در واقع می‌بایست تعداد کل جایگشت‌ها را بر تعداد حالت‌هایی که دو حرف تکراری می‌توانند جابه‌جا شوند یعنی $2!$ تقسیم کنیم، پس پاسخ این سوال $\frac{3!}{2!}=3$ است. چون دو حرف a به $2!$ طریق می‌توانند با هم جابه‌جا شوند و این تعداد جابه جایی به صورت ضربی در $3!$ محاسبه شده و نباید محاسبه می‌شد، پس باید با تقسیم $3!$ بر $2!$ از عملیات ضربی خارج شود.


تذکر: هرگاه n شیء مفروض باشند و در بین آنها k شیء تکراری یا مشابه وجود داشته باشد، برای محاسبه تعداد جایگشت‌های این n شیء ابتدا آنها را متمایز فرض کرده و جایگشت‌های آنها را حساب می‌کنیم و سپس حاصل را بر جایگشت‌های اشیای تکراری (به دلیل ورود در محاسبات به صورت ضربی) تقسیم می‌کنیم؛ یعنی این تعداد برابر است با: $\frac{n!}{k!}$

☑ **مثال: با ارقام ۱و۱و۱و۲ چند رمز چهاررقمی می‌توان نوشت؟**

قضیه جایگشت با تکرار:

اگر n شیء مفروض باشند، به‌طوری‌که n_1 تای آنها از نوع اول و یکسان و n_2 تای آنها از نوع دوم و یکسان و .... n_k تای آنها از نوع kام و یکسان باشند، در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیا برابر است با: $\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\cdots\times n_k!}$

☑ **مثال: با ارقام ۱و۱و۲و۲و۳و۲و۴و۴و۵ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟**

☑ **مثال: ۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲نفره، ۳نفره و ۴نفره واقع در یک هتل اسکان یابند؟**